蘇州大學
SOOCHOW UNIVERSITY

Chap2 Basic Structures

Part II: Sequence, Cardinality, and Matrix

Jin-Hui Wu

2026-03-19

大纲

- 集合
- 函数
- 序列
- 集合的势
- 矩阵

大纲

- 序列 (2.4)
  - 基本概念
  - 递推关系
  - 求和
- 集合基数
- 矩阵

序列的基本概念

- 序列 (sequence)
  - 序列是一个有序串，常用a_n表示第n项 (term)
  - 例

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

序列的基本概念

- 序列 (sequence)
  - 序列是一个有序串，常用a_n表示第n项 (term)
  - 例

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

- 序列是一个函数
  - 定义域是$\mathbb{N}$或$\mathbb{N}^+$，a_n是n的像

序列的基本概念

- 等比数列 (geometric progression)
  - 形式：

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

  - a： 首项 (initial term)
  - r： 公比 (common ratio)

  - 例
    - 首项 = 1， 公比 = -1

$$\{b_n\} = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$$

序列的基本概念

- 等差数列 (arithmetic progression)
  - 形式：

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$$

  - a： 首项
  - d： 公差 (common difference)

  - 例
    - 首项 = 1， 公差 = 2

$$\{u_n\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

大纲

- 序列 (2.4)
  - 基本概念
  - 递推关系
  - 求和
- 集合基数
- 矩阵

序列的递推关系

- 递推关系 (recurrence relation)
  - 将a_n用$a_0, \ldots, a_{n-1}$表示的等式
  - 递推关系的解 (solution)
    - 若一个序列满足递推关系，则称其为一个解
  - 例
    - $a_n = a_{n-1} + 2$

序列的递推关系

- 递推关系 (recurrence relation)
  - 将a_n用$a_0, \ldots, a_{n-1}$表示的等式
- 递推关系的解 (solution)
  - 若一个序列满足递推关系，则称其为一个解
- 初始条件 (initial condition)
  - 为递推关系生效前的所有项指定取值
  - 使递推关系的解唯一

例

- 斐波那契 (Fibonacci) 数列满足
  - 递推关系：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
  - 初始条件：$f_1 = 1$、$f_2 = 1$
  - 求f_3和f_4
  - 验证其通解为

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

拓展：冒泡排序

- 排序 (sort)
  - 将 [1,3,2,6,5,4] 按从小到大的顺序排列

拓展：冒泡排序

- 排序 (sort)
  - 将 [1,3,2,6,5,4] 按从小到大的顺序排列
- 冒泡排序 (bubble sort)
  - 不断比较相邻两个数的大小，每一轮找出一个最大 (或最小) 的元素

拓展：冒泡排序

- 排序 (sort)
  - 将 [1,3,2,6,5,4] 按从小到大的顺序排列

- 冒泡排序 (bubble sort)
  - 不断比较相邻两个数的大小，每一轮找出一个最大 (或最小) 的元素

  - 冒泡排序需要进行多少次比大小？
    - $O(n^2)$

大纲

- 序列 (2.4)
  - 基本概念
  - 递推关系
  - 求和
- 集合基数
- 矩阵

求和

- 求和符号 (summation notation)
  - $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$可表示为

$$\sum_{j=m}^{n} a_j \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j \qquad \sum_{m\le j\le n} a_j$$

  - Σ：求和符号
  - j：求和下标 (index of summation)
  - m, n：下界和上界 (lower / upper bound)

  - 求和符号的一般形式

$$\textstyle\sum_{j\in S} a_j$$

例

- 将下列求和用求和符号表示

$$r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}$$

例

- 证明等比序列求和公式

$$\sum_{j=0}^{n} ar^{j} = \begin{cases} \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} & r \neq 1 \\ (n+1)a & r = 1 \end{cases}$$

一些常用的求和公式

TABLE 2 **Some Useful Summation Formulae.**

Sum	*Closed Form*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

拓展：无穷级数

- 无穷级数 (infinite series)
  - 无穷多项的和，形如$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$
- 应用
  - 泰勒展开：用多项式表示光滑函数
  - 傅里叶展开：用三角函数表示周期函数
- 性质
  - 结合律不一定成立
  - $1-1+1-1+1-1+\cdots$

大纲

- 序列
- 集合基数 (2.5)
- 矩阵

有限集合的等势

- 等势
  - 若两个有限集合元素个数相等，则等势

一般集合的等势

- 等势 (equipotent)
  - 若集合A和B间存在双射，则A和B等势
  - 记作 | A | = | B |

  - 若存在A到B的满射，则A的基数不小于B
  - 即$|A| \geq |B|$

可数集

- 可数 (countable)
  - 有限集可数
  - 与$\mathbb{Z}^+$等势的集合可数
    - 基数记作$\aleph_0$ (aleph null)

  - 其他集合不可数 (uncountable)

例

- 证明正偶数集是可数的

例

- 证明整数集是可数的

例

- 证明正有理数集是可数的

例

- 证明实数集是不可数的
  - 使用康托对角线证明法

可数与可计算性

- 字符串
  - 有限字母表组成的有限长度字符串是可数的
- Java程序
  - 有限长度的Java程序是可数的
- 可计算性
  - 某种编程语言的某个程序能计算的函数称作可计算的函数
  - 程序可数，函数不可数，存在不可计算的函数

大纲

- 序列
- 集合基数 (2.5)
- 矩阵 (2.6)
  - 基本概念
  - 0-1矩阵

矩阵的基本概念

- 矩阵 (matrix)
  - 由数字组成的矩形数组
  - $\mathbb{R}^{m\times n}$
    - 有m行 (row)
    - 有n列 (column)
    - 数字均为实数的矩阵集合

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本概念

- 矩阵 (matrix)
  - 由数字组成的矩形数组

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  - a_{ij}表示矩阵A在第i行第j列的元素
  - A的第i行是行向量$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$
  - A的第j列是列向量$(a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{mj})$

矩阵的基本运算

- 加法 (addition)
  - A、B、A+B形状均为$m \times n$
  - A+B的每个位置为A和B对应位置的和

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算

- 乘法 (multiplication)
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$， $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$， 则$AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - $(AB)_{ij}$为A第i行、B第j列的内积

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算

- 乘法 (multiplication)
  - $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$，$B \in \mathbb{R}^{k\times n}$，则$AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$
  - $(AB)_{ij}$为A第i行、B第j列的内积
  - 矩阵乘法不满足交换律

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算

- 单位矩阵 (identity matrix)
  - n阶单位阵$I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$
    - $(I_n)_{ii} = 1$，其他位置为0
  - 对任意矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，有

$$AI_n = I_mA = A$$

矩阵的基本运算

- 幂 (power)
  - $A^n = A^{n-1}A$

矩阵的基本运算

- 幂 (power)
  - $A^n = A^{n-1}A$

- 转置 (transpose)
  - 若$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则其转置$A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$为将$A$行列翻转，即$(A^\top)_{ij} = A_{ji}$

The transpose of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ is the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

矩阵的基本运算

- 幂 (power)
  - $A^n = A^{n-1}A$

- 转置 (transpose)
  - 若$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则其转置$A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$为将$A$行列翻转，即$(A^\top)_{ij} = A_{ji}$

- 对称矩阵 (symmetric matrix)
  - 满足$A^\top = A$的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

大纲

- 序列
- 集合基数 (2.5)
- 矩阵 (2.6)
  - 基本概念
  - 0-1矩阵

0-1矩阵

- 0-1矩阵 (zero-one matrix)
  - 由0、1构成的矩阵
  - $\{0,1\}^{m\times n}$：m行n列的0-1矩阵

0-1矩阵的运算

- 并 (join)
  - $(A \vee B)_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$
- 交 (meet)
  - $(A \wedge B)_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$
- 均要求A和B形状相同

例

- 计算A和B的并和交

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

0-1矩阵的运算

- 布尔积 (Boolean product)
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$， $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$， 则$A \odot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - $(A \odot B)_{ij} = \left(a_{i1} \wedge b_{1j}\right) \vee \cdots \vee \left(a_{ik} \wedge b_{kj}\right)$

- 例
  - 计算$A \odot B$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

0-1矩阵的运算

- 布尔幂 (Boolean power)
  - A为方阵
  - $A^{[n]} = A^{[n-1]} \odot A$

- 例
  - 计算$A^{[n]}$，$n \in \mathbb{Z}^{+}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

总结

- 序列
  - 等比数列、等差数列
  - 递推关系计算、证明通项（满足递推和初值）
  - 求和符号、常用求和公式
- 集合基数
  - 集合等势与双射、常见可数集、实数不可数
- 矩阵
  - 加法、乘法、幂、转置、对称矩阵
  - 0-1矩阵的并、交、布尔积、布尔幂